١٢

1/3/5/2018 م — المحاضرة ـ 13 ـ جوزيف

موضوعة الفصل الثانية T_2 ـ (٢٦٠) (٩٠)

وهي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين x ، y من فضاء تبولوجي X يوجد جوار u لـ x ، وجوار v لـ y وهذان الجواران لا يتقاطعان.

أي $u \cap v = \phi$

إن الفضاء الذي تحقق هذه الموضوعة يسمى T_2 فضاء.

أو الاسم الشائع فضاء هاوسدورف

واضح من التعريف أن موضوعة الفصل الأولى تنتج من الثانية أي أن كل T_2 فضاء هو T_1 ولكن العكس غير صحيح ونثبت ذلك المثال الآتي.

مثال:

لنأخذ فضاء المتممات المنتهية حيث X مجموعة غير منتهية والمجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي المجموعات التي متمماتها منتهية إضافةً إلى ϕ

والمجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية إضافةً لـ X

وهذا الفضاء هو T_1 فضاء.

لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين x ، y تكون المجموعة $X \setminus \{x\}$ هي جوار لـ y ولا تحوي x

وبالمثل: $X \setminus \{y\}$ هي جوار لـ x ولا تحوي y

* بطريقة أخرى

المجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ هي مجموعة منتهية مغلقة $\forall x \in X$

• ولكن هذا الفضاء ليس T_2 فضاء

لأنه سبق وبرهنا أنه أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين في هذا الفضاء تتقاطعان.

حيث وجدنا من غير الممكن مجموعة منتهية أن تحوي مجموعة غير منتهية ← أي جوارين لأي نقطتين لابد أن يتقاطعان.

/ /

الفضاء لـ T_2

المثال 2.

أي فضاء متري هو T_2 - فضاء (أو فضاء هاوسدورف)
أي أن الفضاءات المترية هي جزء من فضاءات هاوسدورف.

الحل:

نفرض (X, d) فضاء متري و x, y نقطتين مختلفتين
بحيث $x \neq y$ ⇐ المسافة بين x و y ⇐ هو عدد موجب > 0

$$d(x,y) = r > 0$$

$B(x, \frac{r}{2})$, $B(y, \frac{r}{2})$

والجواران لا يتقاطعان.

* يبرهن أن الفضاء X يكون فضاء هاوسدورف إذا كان تقاطع جميع الجوارات المغلقة للنقطة x هي فقط المجموعة $\{x\}$

* سنبرهن شرطاً كافياً آخر من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

ليكن X فضاء تبولوجي. إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون X فضاء هاوسدورف هو أن تكون المجموعة

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$$

مجموعة مغلقة في فضاء الجداء $X^2 = X \times X$

• لدينا $X = \{a, b, c\}$

$\Rightarrow \Delta = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

• وفي المستوي $R^2 = R \times R$

$\Rightarrow \Delta = \{$ مجموعة نقاط منصف الربعين الأول والثالث $x \in R\}$

Y Δ X

نفس المعنى : اذا وفقط اذا ⇔ الشرط اللازم والكافي ⇔ القضيتان متكافئتان

/ /	3) $X^2 \setminus \Delta$ ، $X^2 = X \times X$

البرهان

نفرض أن X هو فضاء هاوسدورف ونثبت أن Δ أنها مجموعة مغلقة عن طريق إثبات أن مكملها مفتوحة.

Y ، Δ ، X

لنأخذ نقطة (x,y)

$(x,y) \notin \Delta$ أي $(x,y) \in X^2 \setminus \Delta$

$\Leftarrow$ $x \neq y$

وبما أن الفضاء هو T_2 يوجد جوار مفتوح U لـ x

و V لـ y

بحيث أن $U \cap V = \emptyset$

قاعدة

إن المجموعة $U \times V$ هي مجموعة من عناصر القاعدة لفضاء الجداء

أي أنها مجموعة مفتوحة في فضاء الجداء وتحوي النقطة (x,y)

$\Rightarrow (x,y) \in U \times V \subseteq X^2 \setminus \Delta \Rightarrow U \times V \cap \Delta = \emptyset$

بما أن $U \cap V$ هي خالية ⇐ لا يمكن تشكيل ثنائيات متماثلة

$U \times V$ مجموعة مفتوحة تحوي النقطة x وتقاطعها مع $\Delta = \emptyset$

⇐ $U \times V$ موجودة بالمتممة

$U \times V$ وبما أنها كيفية ⇐ جميع نقاط المتممة هي داخلية

⇐ $X^2 \setminus \Delta$ مجموعة مفتوحة ⇐ Δ مغلقة ⇐

⟸ نفرض أن Δ مجموعة مغلقة

ونثبت أن الفضاء هو T_2

ولذلك نأخذ نقطتين مختلفتين x, y كيفيتين من X حيث $x \neq y$

⇐ $(x,y) \notin \Delta$

⇐ فهي تنتمي إلى المتممة $(x,y) \in X^2 \setminus \Delta$

والمجموعة $X^2 \setminus \Delta$ مفتوحة ⇐ Δ مغلقة ⇐

وبالتالي نوجد مجموعة مفتوحة ابتدائية مثل شكل $u \times v$

بحيث $(x,y) \in u \times v \subseteq X^2 \setminus \Delta$

من هنا نستنتج أن $\begin{cases} x \in u \\ y \in v \end{cases}$ ، v , u مجموعتان مفتوحتان في X

و $u \cap v = \emptyset$ ⟸ بأن الفضاء هو فضاء هاوسدورف

فهو يحقق الموضوعة T_2 أي هو T_2 فضاء.

ملاحظة:

ليكن f و g تطبيقين مستمرين من الفضاء X إلى الفضاء Y

$$f, g : X \longrightarrow Y$$

إذا كان Y هو فضاء هاوسدورف فإن المجموعة (الشق)

$$A = \{ x \in X : f(x) = g(x) \}$$

وهي مجموعة النقاط التي يتساوى عليها g , f ، هي مغلقة في X

البرهان:

نبني تطبيقاً جديداً $\delta : X \longrightarrow Y^2 = Y \times Y$

على النحو التالي:

$$\delta : x \longrightarrow (f(x), g(x))$$

نعرف δ مستمر استناداً إلى مبرهنة سابقة مع ملاحظة أن

$P_1 \circ \delta = f$ ، كل منهما مستمر $f : X \longrightarrow \prod Y$

$P_2 \circ \delta = g$ لأن f مستمر ⟺ $\{P_\alpha \circ f\}$

جميع التطبيقات $\{P_\alpha \circ f\}$ مستمرة

وعلماً أن Y بالفرض هو فضاء هاوسدورف ⟸ فالمجموعة

$\Delta = \{(y,y) : y \in Y\}$ هي مجموعة مغلقة في Y^2

• وعلماً أن Δ مغلقة و δ مستمر ⟸ فإن الصورة العكسية بـ δ

لـ Δ مغلقة في X وهي $\delta^{-1}(\Delta)$

$$\delta^{-1}(\Delta) = A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

نتيجة : (الفصل على المتغير)

اذا كان لدينا تطبيقان مستمران من فضاء X الى فضاء هاوسدورفي Y
واذا تساوى هذان التطبيقان على مجموعة كثيفة في X
بانهما يتطابقان على X

تسمى مبدأ تمديد التطابقات

• التطبيق المستمر يعرف بصورة وحيدة اذا عرف على المجموعة الكثيفة

* ملاحظة :

إن الفضاءات T_0, T_1, T_2 تمتلك خواص مشتركة
سندرس الآن :
وسنرمز لها جميعاً بالرمز T_i فضاء حيث $i = 0,1,2$

مبرهنة مهمة :

ليكن X فضاءً توبولوجياً ان القضيتين الاتيتين متكافئتان :

1) X هو T_i فضاء $i = 0,1,2$

2) يوجد تطبيق مستمر f منطلقه X ومستقره T_i فضاء ويحقق الخاصة $f(x) \neq f(y)$
من اجل اي نقطتين مختلفتين $x \neq y$ ← أي متباين

• إن التطبيق يتعلق بالنقطتين x , y وسنستنتج فيهما البرهان :

1) ← 2) نكتب انه يوجد تطبيق مستمر متباين منطلقه X ومستقره T_i
إن التطبيق هو التطبيق المطابق

$I : X \to X$

$I(x) = x$

(٦) تمارين

2) ⇐ 1) من أجل أي نقطتين x, y من X و $x \neq y$

لدينا أنه $f(x) \neq f(y)$ فرضاً

إذا كانت H جوار لـ $f(x)$ في المستقر ⇐ فإن الصورة العكسية

ولا تحوي $f(y)$

$f^{-1}(H)$ ⇐ هو جوار للـ x ولا تحوي y

وإذا كانت H جوار لـ $f(x)$ لا تحوي $f(y)$

G لـ $f(y)$ ~ ~ $f(x)$

فإن $f^{-1}(H)$ جوار لـ x ولا تحوي y

$f^{-1}(G)$ ~ لـ y ~ ~ x

⇐ وأيضاً: إذا كانت H و G جوارين لنقطتين $f(x)$, $f(y)$

غير متقاطعين فإن $f^{-1}(H)$ و $f^{-1}(G)$ ⇐ جوارين لـ x و y

على الترتيب وهما غير متقاطعين

نتائج

1- إن كون الفضاء التبولوجي X هو T_i - فضاء $(i = 0, 1, 2)$

هي صفة تبولوجية له بمعنى أنه إذا كان الفضاءان X_1, X_2

متكافئان (بينهما هوموميومورفيزم)

وإذا كان أحدهما T_i - فضاء فإن الآخر يكون كذلك.

$f : X_1 \to X_2$, $f^{-1} : X_2 \to X_1$

2- كون الفضاء هو T_1 فضاء هي صفة وراثية له (بمعنى)

أن صفة

ملاحظة: ⇐

إذا كان X فضاء وهو T_i - فضاء $(i = 0, 1, 2)$

فإن أي فضاء جزئي A منه يكون أيضاً T_i - فضاء

البرهان:

ناخذ تطبيق الادخال $I_A : A \to X$

(وهو مقصور التطبيق المطابق)

$I_A(x) = x \quad , \forall x \in A$

وهو مستمر ومتباين ومستقره T_1 - فضاء

ومنه استنادا للمبرهنة A هو T_1 - فضاء .

(الخاصة أيضاً T_1 - فضاء)

انظر المبرهنة ـ 13 ـ